SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2000-2001

Andrea Pascucci

SU UN PROBLEMA DI CAUCHY PER UN'EQUAZIONE ULTRAPARABOLICA LINEARE

22 maggio 2001

Tecnoprint - Bologna 2001

Riassunto. Consideriamo il seguente problema di Cauchy non lineare

$$\begin{aligned} Lu \equiv \partial_{xx}u + u\partial_y u - \partial_t u = f(\cdot, u), & \qquad \text{in }]0,T] \times \mathbb{R}^2, \\ u(\cdot, 0) = g, & \qquad \text{in } \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Proviamo l'esistenza di soluzioni locali, studiamo la regolaritá classica delle soluzioni e diamo condizioni per l'esistenza di soluzioni definite globalmente nel tempo.

Abstract. We study the existence of local and global solutions to the following non linear Cauchy problem

$$\begin{aligned} Lu \equiv \partial_{xx}u + u\partial_y u - \partial_t u = f(\cdot, u), & \qquad \text{in }]0,T] \times \mathbb{R}^2, \\ u(\cdot, 0) = g, & \qquad \text{in } \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

We also study the interior regularity properties of solutions.

1 Introduzione

Presentiamo alcuni risultati ottenuti in collaborazione con Fabio Antonelli [3], con Giovanna Citti e Sergio Polidoro [13], [14], con Sergio Polidoro [34]. Consideriamo il problema di Cauchy nelle variabili $z = (x, y, t) \in \mathbb{R}^3$

$$Lu \equiv \partial_{xx}u + u\partial_y u - \partial_t u = f(\cdot, u), \qquad \text{in } S_T \equiv]0,T] \times \mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

$$u(\cdot, 0) = g, \qquad \text{in } \mathbb{R}^2. \tag{1.2}$$

Nel seguito assumeremo sempre f, g globalmente Lipschitziane. Questo problema è stato recentemente considerato nell'ambito della teoria dell'utilità stocastica in matematica finanziaria. In [2] Antonelli, Barucci e Mancino provano con tecniche probabilistiche che se $T > 0$ è abbastanza piccolo allora esiste una soluzione viscosa di (1.1)-(1.2) nel senso della User's guide [15], che verifica le seguenti stime di Hölderianità

$$|u(x,y,t) - u(x',y',t)| \le c_0 \left(|x - x'| + |y - y'|\right), \tag{1.3}$$

$$|u(x,y,t) - u(x,y,t')| \le c_0 \left(1 + |(x,y)|\right) |t - t'|^{\frac{1}{2}}, \tag{1.4}$$

per ogni $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ e $t, t' \in [0,T]$, con $c_0 > 0$ che dipende dalle costanti di Lipschitz di f e g.

Ricordiamo anche i risultati di Vol'pert e Hudjaev [39] e di Escobedo, Vazquez e Zuazua [16] di esistenza di soluzioni deboli per una classe più generale di equazioni di tipo misto parabolico-iperbolico che comprende (1.1). Notiamo che, se $f = 0$, l'equazione (1.1) equivale all'equazione del calore in $\mathbb{R}^2$ per funzioni $u = u(x,t)$ che non dipendano dalla variabile y, mentre si riduce all'equazione di Burgers

$$u\partial_y u - \partial_t = 0, \tag{1.5}$$

nel caso in cui $u = u(y,t)$. Una caratteristica fondamentale di equazioni non lineari del tipo (1.5) è che, in generale, una soluzione del relativo problema di Cauchy diventa discontinua in tempo finito anche se il dato iniziale è regolare, di classe C^∞. Per ottenere risultati di esistenza globale nel tempo senza assumere ulteriori ipotesi, è dunque necessario adottare una nozione debole di soluzione (generalmente distribuzionale). In questo contesto si collocano i lavori [39], [16] in cui si assume che il dato iniziale sia limitato e sommabile, e si prova la risolubilità di (1.1)-(1.2) col metodo classico della regolarizzazione ellittica, studiando l'equazione regolarizzata

$$L^\varepsilon u \equiv \partial_{xx}u + \varepsilon^2 \partial_{yy}u + u\partial_y u - \partial_t u = f(\cdot, u), \qquad \varepsilon > 0. \tag{1.6}$$

D'altra parte, a causa della possibile perdita di continuità, la soluzione non è caratterizzata univocamente ed è pertanto necessario introdurre ulteriori condizioni (condizioni di entropia) che garantiscano l'unicità.

Sottolineiamo il fatto che nel modello finanziario di [2] si ammette un dato iniziale con crescita lineare. Sotto queste ipotesi si possono verificare fenomeni di blow-up della soluzione, come mostra il seguente semplice esempio dato in [3].

Esempio 1.1 *Siano $f = 0$ e $g(x,y) = x + y$. La funzione*

$$u(x,y,t) = \frac{x+y}{1-t}$$

è soluzione classica del problema (1.6)-(1.2) per ogni $\varepsilon \geq 0$. Inoltre la soluzione u scoppia per t che tende a 1 e $x + y \neq 0$.

Se $\varepsilon > 0$, utilizzando la classica trasformazione di Hopf [23]

$$u \mapsto e^{\frac{1}{2\varepsilon^2}\int u dy},$$

si riconosce che alla crescita lineare del dato iniziale g per l'equazione (1.6) corrisponde una crescita del tipo e^{y^2}, critica per l'equazione del calore.

Osserviamo infine che se $g(x,y) = x - y$, allora $u(x,y,t) = \frac{x-y}{1+t}$ è soluzione globale di (1.6)-(1.2).

In questo seminario presentiamo alcuni risultati di regolarità per la soluzione u trovata in [2]. Anzitutto, essendo L un operatore differenziale degenere non si possono utilizzare i risultati noti di regolarità per soluzioni viscose di Cabre e Caffarelli [9], Trudinger [38], Ishii e Lions [26], Bian e Dong [5], Wang [41].

Incominciamo invece col caratterizzare in senso *distribuzionale* la soluzione u in [2]. In [3] con tecniche probabilistiche e successivamente in [34] con metodi puramente analitici, proviamo il seguente

Teorema 1.2 *Esistono T, c_0 costanti positive che dipendono solo dalle costanti di Lipschitz di f, g, tali che per ogni $\varepsilon > 0$ e $\alpha \in]0,1[$ il problema di Cauchy (1.6)-(1.2) ha una e una sola soluzione $u^\varepsilon \in C^{2+\alpha}(S_T) \cap C(\overline{S}_T)$ che verifica le stime di Hölder (1.3)-(1.4).*

Nell'enunciato precedente $C^{2+\alpha}$ indica lo spazio di Hölder relativo alla distanza parabolica

$$d((x,y,t),(x',y',t')) = |x - x'| + |y - y'| + |t - t'|^{\frac{1}{2}}.$$

Come conseguenza del teorema precedente, utilizzando il classico metodo di Bernstein, è possibile provare delle stime ε-uniformi in L^2_{loc} per le derivate di u^ε. Utilizzando inoltre un risultato di unicità della soluzione viscosa provato in [3], proviamo in [14] che u è soluzione forte del problema nel senso seguente:

Corollario 1.3 *La soluzione u in [2] è tale che*

$$u \in H^1_{\mathrm{loc}}(S_T), \qquad \partial_{xx} u \in L^2_{\mathrm{loc}}(S_T), \tag{1.7}$$

e l'equazione (1.1) è verificata quasi ovunque.

Grazie a questi risultati preliminari, è possibile provare ulteriore regolarità per la soluzione u utilizzando una formula di rappresentazione integrale. Notiamo che, posto $X = \partial_x$ e definendo l'operatore differenziale del prim'ordine (campo vettoriale) non lineare

$$Yu = u\partial_y u - \partial_t u,.$$

possiamo riscrivere L nella forma

$$L = X^2 + Y.$$

Abbiamo studiato il problema della regolarità nell'ambito della teoria degli operatori lineari sui gruppi di Lie. In generale, un operatore di questo tipo in $\mathbb{R}^N$ è rappresentato nel modo seguente

$$H = \sum_{j=1}^{p} X_j^2 + X_0. \tag{1.8}$$

Un caso particolarmente significativo è quello in cui i campi $X_0, ..., X_p$ verifichino le due seguenti ipotesi:

(H1) i coefficienti dei campi X_j, $j = 0, \ldots, p$, sono di classe C^∞;

(H2) [Condizione di Hörmander] il rango dell'algebra di Lie generata dai campi è massimo in ogni punto.

Sotto le condizioni (H1)-(H2), nel classico lavoro di Hörmander [24] si prova che l'operatore in (1.8) è ipoellittico. Altre importanti proprietà, come l'esistenza di una soluzione fondamentale e della distanza di controllo, sono stabilite da Nagel, Stein e Wainger [33], Rothschild e Stein [36], Jerison e Sanchez-Calle [28], Sanchez-Calle [37], e una teoria generale della regolarità sia negli spazi di Sobolev che negli spazi di funzioni Hölderiane è sviluppata da Folland [18], Folland e Stein [19], Rothschild e Stein [36], Krylov [27]. In seguito, Lu [29], Polidoro [35], Bramanti e Brandolini [7], Bramanti, Cerutti e Manfredini [8], hanno studiato una classe più ampia di operatori del tipo

$$\sum_{i,j=1}^{p} \alpha_{ij} X_i X_j + X_0, \tag{1.9}$$

dove i coefficienti α_{ij} possono essere anche discontinui ma i campi X_j verificano (H1)-(H2).

In tutti questi lavori è cruciale il fatto che i campi considerati siano regolari almeno quanto serve per poter commutarli fra loro in modo da generare N vettori linearmente indipendenti in ogni punto di $\mathbb{R}^N$. In [20]-[21], Franchi e Lanconelli studiano per la prima volta le proprietà della distanza di controllo relativa ad una famiglia di campi vettoriali non regolari con lo scopo di utilizzare un classico procedimento iterativo, ideato da Moser [32], per dimostrare la regolarità Hölderiana delle soluzioni deboli di un'equazione del tipo

$$\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_j}(a_{ij} \partial_{x_i} u) = 0, \tag{1.10}$$

dove la matrice $A = (a_{ij}(x))$ è semidefinita positiva per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Franchi e Lanconelli assumono che l'operatore sia "ellittico" rispetto ad una famiglia $X_1, ..., X_p$ di campi vettoriali localmente Lipschitziani, nel senso che vale

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{p} \langle X_j(x), \xi \rangle^2 \le \langle A(x)\xi, \xi \rangle \le \lambda \sum_{j=1}^{p} \langle X_j(x), \xi \rangle^2,$$

per una certa costante λ. La classe di operatori considerata contiene, per esempio, in $\mathbb{R}^2$

$$\partial_x^2 + |x|^{2\alpha}\partial_y^2,$$

dove α è una costante positiva.

Il caso di operatori di tipo Levi a coefficienti non lineari è stato studiato in alcuni recenti lavori di Citti [10] e Citti, Lanconelli e Montanari [12]. Inoltre in [11] Citti stabilisce un risultato di regolarità per l'equazione di Levi senza ipotesi di tipo Hörmander.

Volendo utilizzare la teoria lineare per lo studio del nostro problema, definiamo

$$L_u = \partial_{xx} + u\partial_y - \partial_t \tag{1.11}$$

con la funzione u considerata come coefficiente. Risulta immediato che le ipotesi sostanziali (H1) e (H2) non possono essere assunte a priori. Infatti la condizione (H2) si traduce in un'ipotesi di non degenerazione del commutatore

$$[X, Y] = (\partial_x u)\partial_y,$$

ovvero nella condizione

$$\partial_x u(z) \neq 0, \qquad \forall z. \tag{1.12}$$

Notiamo che la regolarità di u è stabilita in (1.7), cosicchè $\partial_x u$ è definita quasi ovunque e la condizione precedente deve essere, per ora, considerata solo in senso formale.

La condizione (H1) equivale invece alla regolarità C^∞ della soluzione che è proprio l'obiettivo della ricerca. Inoltre L non rientra nella classe di operatori (1.9) poichè la regolarità del campo Y è la stessa della soluzione u. Sviluppando le idee in [11], siamo in grado di provare in [14] che la soluzione viscosa u del problema (1.1)-(1.2) è in realtà soluzione classica. Sottolineiamo il fatto che, malgrado la natura degenere dell'operatore L, non richiediamo ipotesi del tipo (1.12) sui commutatori dei campi X e Y. Pur non conoscendo la struttura dell'algebra di Lie associata formalmente a L, consideriamo L come un operatore subellittico rispetto ad alcuni gruppi di Lie scelti a priori in modo opportuno e siamo in grado di provare l'esistenza della derivata direzionale euclidea

$$Yu(z) = \frac{\partial u}{\partial \nu_z}(z),$$

dove $\nu_z = (0, u(z), -1)$. Diciamo che u è *soluzione classica* dell'equazione (1.1) se le funzioni $\partial_{xx}u$ e $z \mapsto \frac{\partial u}{\partial \nu_z}(z)$ sono continue e l'equazione è verificata puntualmente. In [13], [14] proviamo il seguente

TEOREMA 1.4 *La soluzione u in [2] è soluzione classica del problema di Cauchy* (1.1)-(1.2). *Inoltre, se $f \in C^\infty$ e vale* (1.12) *allora $u \in C^\infty(S_T)$.*

Questo risultato è ragionevole nel senso che, senza assumere l'ipotesi di Hörmander, siamo in grado di provare la regolarità della soluzione solo nelle direzioni dei campi. Si noti che benchè Y si possa pensare come combinazione lineare delle derivate ∂_y, ∂_t, non è vero

in generale che la soluzione u possegga tali derivate. Osserviamo anche che, una volta provato che u è soluzione classica, la condizione di Hörmander (1.12) ha senso poichè $\partial_x u$ esiste ed è continua.

In [14] diamo anche alcune condizioni su f, g sufficienti affinchè l'ipotesi di Hörmander (1.12) sia soddisfatta e quindi la soluzione sia di classe C^∞.

TEOREMA 1.5 *Supponiamo che $\partial_x f, \partial_x g$ siano definite e continue, $\partial_x f \leq 0$ in S_T e $\partial_x g > 0$ in $\mathbb{R}^2$. In tal caso si ha $\partial_x u > 0$ in S_T.*

Osserviamo che la condizione $\partial_x f$ è naturale per poter applicare il principio di minimo, mentre la condizione $\partial_x g > 0$ è suggerita dal modello finanziario.

Concludiamo l'introduzione, riportando il seguente risultato di esistenza globale provato in [34].

TEOREMA 1.6 *Supponiamo che la funzione $y \mapsto g(x, y)$ sia monotona (debolmente) decrescente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora il problema di Cauchy* (1.1)-(1.2) *ha soluzione classica per ogni $T > 0$.*

Questa nota è organizzata nel modo seguente: nella Sezione 2 descriviamo i Teoremi 1.2 e 1.6. La Sezione 3 è dedicata al Corollario 1.3 e al Teorema 1.4. Infine nella Sezione 4 diamo una traccia della prova del Teorema 1.5.

2 Problema regolarizzato e prolungabilità

Diamo lo schema di due dimostrazioni del Teorema 1.2, la prima data in [3] con metodi probabilistici, e la seconda data in [34].

PRIMA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.2.
Costruiamo un sistema retrogrado-diretto di equazioni differenziali stocastiche (in breve, EDS) naturalmente associato al problema (1.6)-(1.2). Più precisamente, consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ su cui sono definiti due moti browniani 1-dimensionali B, W indipendenti. Indichiamo con $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ la filtrazione generata da B, W. Per ogni $\varepsilon > 0$, consideriamo il sistema

$$dY_t = V_t dt + \varepsilon dW_t, \qquad Y_0 = y_0, \tag{2.1}$$

$$dV_t = f(t, B_t, Y_t, V_t)\, dt, \qquad V_T = g(B_T, Y_T). \tag{2.2}$$

È utile fare qualche commento preliminare sul concetto di soluzione di un'EDS retrograda. L'interesse per questo tipo di equazioni ha origine in teoria del controllo ottimo stocastico (si vedano, per esempio, le monografie di Bensoussan [4] e Fleming e Soner [17]). Lo studio sistematico di sistemi di EDS retrogradi-diretti è cominciato circa una decina di anni fa con i lavori di Antonelli [1], Ma, Protter e Yong [30], Hu e Peng [25]. Una delle differenze sostanziali fra un'EDS e un'equazione differenziale deterministica, consiste nel fatto che

non si può invertire il tempo. Consideriamo, per esempio, il seguente banale problema di Cauchy con condizione finale $\xi \in \mathbb{R}$,

$$dX_t = 0, \qquad X_T = \xi. \tag{2.3}$$

L'unica soluzione di (2.3) è la funzione costante $X_t = \xi$. Ma se consideriamo (2.3) come un'EDS nel senso di Ito con dato finale ξ, variabile aleatoria $\mathcal{F}_T$-misurabile, allora in generale non c'è soluzione. Infatti, la soluzione X_t di un'EDS di Ito deve essere adattata alla filtrazione (ossia X_t deve essere $\mathcal{F}_t$-misurabile per ogni t) e, nel caso di (2.3), ciò non è vero a meno che ξ non sia costante.

Per convenzione, si considera soluzione (generalizzata) di (2.3) l'attesa condizionata $X_t = E(\xi \mid \mathcal{F}_t)$. Tale definizione, oltre che ragionevole, si dimostra essere efficiente, come vedremo fra breve. Per maggiori informazioni sulle EDS retrograde rimandiamo alle recenti monografie di Ma e Yong [31], Yong e Zhou [40], Fleming e Soner [17].

Definiamo soluzione del sistema (2.1)-(2.2), una coppia di processi (Y, V) adattati, di quadrato sommabile (in breve, $Y, V \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}$) tali che

$$Y_t = y_0 + \int_0^t V_s ds + \varepsilon W_t, \tag{2.4}$$

$$V_t = E(g(B_T, Y_T) + \int_t^T f(s, B_s, Y_s, V_s)\, ds \mid \mathcal{F}_t). \tag{2.5}$$

Utilizzando il teorema di punto fisso di Banach nello spazio $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}} \times \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}$, si prova che, se T è abbastanza piccolo, il problema (2.4)-(2.5) è risolubile. I flussi di soluzioni del sistema sono definiti da

$$\begin{aligned} B_s^{t,x} &= x + B_s - B_t, \\ Y_s^{\varepsilon,t,x,y} &= y + \int_t^s V_r^{\varepsilon,t,x,y} dr + \varepsilon(W_s - W_t), \\ V_s^{\varepsilon,t,x,y} &= E\left(g(B_T^{t,x}, Y_T^{\varepsilon,t,x,y}) + \int_s^T f(r, B_r^{t,x}, Y_r^{\varepsilon,t,x,y}, V_r^{\varepsilon,t,x,y}) dr \mid \mathcal{F}_s \right), \end{aligned}$$

per $(x, y, t) \in S_T, s \geq t$. Poniamo

$$v^\varepsilon(x, y, t) = V_t^{\varepsilon,x,y,t} = v^\varepsilon(B_s^{t,x}, V_s^{t,x,y}, s), \qquad (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T], \tag{2.6}$$

dove l'ultima uguaglianza è conseguenza della proprietà di Markov. Utilizzando l'espressione integrale di V, un calcolo diretto prova che v^ε verifica le stime Hölderiane (1.3)-(1.4) con costante c_0 *indipendente* da ε. Inoltre, applicando *formalmente* la formula di Ito in (2.6) e ricordando che V risolve l'EDS (2.2), si deduce facilmente che v^ε è soluzione del

problema di Cauchy retrogrado

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_{xx} + \frac{\varepsilon^2}{2}v_{yy} + vv_y + v_t &= f(\cdot, v), \qquad &\text{in } S_T, \\ v(T, \cdot) &= g, \qquad &\text{in } \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Tale problema è equivalente, a meno di un semplice cambio di variabili, a (1.6)-(1.2). In realtà, la funzione v^ε in (2.6) non è, in generale, abbastanza regolare per poter applicare il teorema di Ito. Tuttavia il discorso può essere reso rigoroso utilizzando la nozione di soluzione di viscosità. Ricordiamo che la funzione (continua) v è sotto-soluzione viscosa di (2.7) se, per ogni $z \in S_T$ e $\varphi \in C^2$ tale che z è massimo per $v - \varphi$, vale

$$\left(\frac{1}{2}\varphi_{xx} + \frac{\varepsilon^2}{2}\varphi_{yy} + v\varphi_y + \varphi_t\right)(z) \geq f(z, v(z)).$$

Utilizzando una tecnica ormai standard che consiste nell'applicare la formula di Ito alla funzione test φ, si verifica che v^ε è sotto-soluzione (e anche sopra-soluzione) del problema. In base a classici risultati di regolarità, si conclude infine che $v^\varepsilon \in C^{2+\alpha}(S_T)$. □

TRACCIA DELLA DIMOSTRAZIONE DEI TEOREMI 1.2 E 1.6.
In [34] proviamo il Teorema 1.2 utilizzando il teorema di punto fisso di Schauder in uno spazio di funzioni caratterizzate dalle condizioni (1.3)-(1.4). In tale spazio l'operatore L^ε in (1.6) soddisfa un principio di confronto e, col metodo classico di Bernstein, siamo in grado di provare opportune stime a priori delle derivate spaziali delle soluzioni di (1.6)-(1.2) per tempi piccoli. Se inoltre vale l'ipotesi del Teorema 1.6 ovvero la funzione $y \mapsto g(x, y)$ è monotona (debolmente) decrescente per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora si verifica che le stime precedenti sono indipendenti dal tempo T e di conseguenza la soluzione è prolungabile.

□

3 Soluzioni classiche

Diamo uno schema della prova del Corollario 1.3 e del Teorema 1.4

DIMOSTRAZIONE DEL COROLLARIO 1.3. In base al Teorema 1.2, esiste una successione (ε_n) tale che $\varepsilon_n \downarrow 0$ e una successione (u^{ε_n}) in $C^{2+\alpha}(S_T) \cap C(\overline{S}_T)$ tali che, per ogni n la funzione u^{ε_n} è soluzione del problema di Cauchy (1.6)-(1.2) e verifica le stime di Hölder (1.3)-(1.4). Inoltre (u^{ε_n}) converge uniformemente sui compatti di $\overline{S}_T$. Per l'unicità della soluzione viscosa Lipschitziana di (1.1)-(1.2) (cfr. [3]) (u^{ε_n}) converge alla soluzione u di [2]. Deriviamo l'equazione (1.6) rispetto alla variabile l, dove $l = x$ oppure $l = y$, moltiplichiamo ambo i membri per $u^{\varepsilon_n}\varphi^2$, dove $\varphi \in C_0^\infty(S_T)$ è fissata, e integrando su S_T ricaviamo la seguente stima nella norma L^2:

$$\|\partial_{xx}u^{\varepsilon_n}\varphi\|_2 + \|\partial_{xy}u^{\varepsilon_n}\varphi\|_2 + \varepsilon_n\|\partial_{yy}u^{\varepsilon_n}\varphi\|_2 + \|\partial_t u^{\varepsilon_n}\varphi\|_2 \leq c_1,$$

dove la costante c_1 dipende solo da f e φ. Di conseguenza possiamo assumere che $\partial_t u^{\varepsilon_n}$, $\partial_{xx}u^{\varepsilon_n}$ e $\varepsilon_n^2\partial_{yy}u^{\varepsilon_n}$ convergano debolmente in $L^2_{\text{loc}}(S_T)$, da cui la tesi. □

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.4.
Dobbiamo provare i due fatti seguenti:

(i) la soluzione u in [2] è soluzione classica del problema di Cauchy (1.1)-(1.2);
(ii) se $f \in C^\infty$ e vale (1.12) allora $u \in C^\infty(S_T)$.

Cominciamo col provare (ii). La dimostrazione è basata su una formula di rappresentazione di u e delle sue derivate in termini della soluzione fondamentale di un operatore congelato.

Il metodo di congelamento è una tecnica ben nota, usata per lo studio delle proprietà di regolarità delle soluzioni di equazioni paraboliche lineari. In questo caso l'operatore associato è ottenuto semplicemente calcolando i coefficienti in un punto fissato. Questo nuovo operatore è, a meno di un cambio di variabili, l'operatore del calore e la sua soluzione fondamentale si può considerare una parametrice della soluzione fondamentale dell'operatore a coefficienti variabili. Un argomento molto più difficile è stato utilizzato nel caso di un operatore di tipo Hörmander (1.8). Infatti le proprietà dell'operatore dipendono non solo dai campi ma anche dai loro commutatori. Se i campi dell'operatore sono della forma

$$X_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\partial_{x_j}, \qquad i = 0, ..., m,$$

allora i campi congelati in un punto x_0

$$X_{i,x_0} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x_0)\partial_{x_j}, \qquad i = 0, ..., m,$$

commutano e l'algebra di Lie da essi generata è, in generale, uno spazio vettoriale di dimensione minore di N. In tal caso l'operatore

$$\sum_{i=1}^{m} X_{i,x_0}^2 + X_{0,x_0} \tag{3.1}$$

non è ipoellittico e non ha soluzione fondamentale. Folland e Stein [17] osservarono per primi che in questo caso gli operatori modello sono ancora del tipo (1.8) con l'algebra di Lie associata nilpotente e stratificata. In seguito Rothschild e Stein [36] introdussero una versione astratta e generale del metodo di congelamento. La scelta dei campi congelati X_{i,x_0} era fatta in modo che l'algebra di Lie generata fosse nilpotente, stratificata e con la stessa struttura di Lie$(X_0, ..., X_m)$ almeno fino ad una certa altezza di commutazione. Con questa scelta di campi, l'operatore (3.1) è ipoellittico e la sua soluzione fondamentale Γ_{z_0} è una parametrice per l'operatore di partenza. Come detto in precedenza, qui utilizziamo un adattamento di queste tecniche, introdotto da Citti [10] per lo studio dell'equazione di Levi.

Consideriamo l'operatore linearizzato in (1.11) e, fissato $z_0 = (x_0, y_0, t_0) \in S_T$, poniamo

$$Y_{z_0} = (u(z_0) + (x - x_0)\partial_x u(z_0))\partial_y - \partial_t,$$

$$L_{z_0} = X^2 + Y_{z_0}.$$

Osserviamo che, in base all'ipotesi cruciale (1.12), L_{z_0} è, a meno di un cambio di variabili, l'operatore di Kolmogorov in $\mathbb{R}^3$

$$\partial_{xx} + x\partial_y - \partial_t.$$

In base al Corollario 1.3, possiamo rappresentare la soluzione u di (1.1) in termini di Γ_{z_0}, soluzione fondamentale di L_{z_0}:

$$u(z) = \int \Gamma_{z_0}(z,\zeta)L_{z_0}u(\zeta)d\zeta = \int \Gamma_{z_0}(z,\zeta)f(\zeta,u(\zeta))d\zeta - \int \Gamma_{z_0}(z,\zeta)K_{z_0}(\zeta)d\zeta, \quad (3.2)$$

dove

$$K_{z_0}(\zeta) \equiv (L - L_{z_0})u(\zeta) = (u(\zeta) - u(z_0) - (\xi - x_0)\partial_x u(z_0))\partial_y u(\zeta).$$

Indichiamo con d_{z_0} la distanza di controllo dell'operatore L_{z_0} e con $C^{k+\alpha}_{d_{z_0}}$ lo spazio di funzioni Hölderiane associato, con $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in]0,1[$. Poichè l'operatore L è del second'ordine, consideriamo il campo Y come una derivata seconda, mentre ∂_x è l'unica derivata del prim'ordine. Di conseguenza il polinomio di Taylor di u di punto iniziale z_0 è

$$u(z_0) + (x - x_0)\partial_x u(z_0)$$

e, poichè $\partial_y u$ è limitata per (1.3), quando $u \in C^{1+\alpha}_{d_{z_0}}$, si ha

$$K_{z_0}(\zeta) = O(d_{z_0}(z_0,\zeta)^{1+\alpha}), \qquad \text{per } d_{z_0}(z_0,\zeta) \longrightarrow 0.$$

Scegliendo $z = z_0$ in (3.2), questa stima ci permette di differenziare la formula di rappresentazione fino al terz'ordine. Un delicato argomento, basato sull'utilizzo di opportuni rapporti incrementali di ordine superiore, permette di iterare questo procedimento e concludere la prova. Per i dettagli rimandiamo al lavoro [13].

La prova di (i) segue le stesse idee anche se c'è una difficoltà ulteriore in quanto, senza assumere l'ipotesi di Hörmander (1.12), l'operatore congelato L_{z_0} può non avere soluzione fondamentale. Per questo motivo approssimiamo il campo Y in modo differente. Fissato $z_0 \in S_T$, poniamo

$$Y_{0,z_0} = (u(z_0) + (x - x_0))\partial_y - \partial_t.$$

In questo modo

$$[X, Y_{0,z_0}] = \partial_y$$

e l'operatore

$$L_{0,z_0} = X^2 + Y_{0,z_0}$$

ha una soluzione fondamentale Γ_{0,z_0} e una distanza di controllo d_{0,z_0}. Come in precedenza rappresentiamo u nella forma

$$u(z) = \int \Gamma_{0,z_0}(z,\zeta)(K_{1,z_0}(\zeta) + K_{2,z_0}(\zeta))d\zeta, \quad (3.3)$$

dove, fissata una funzione cut-off φ,

$$K_{1,z_0} = f\varphi + uL_{0,z_0}\varphi + 2\partial_x u \partial_x \varphi, \qquad K_{2,z_0}(\zeta) = (u(z_0) - u(\zeta) + \xi - x_0)\partial_y u(\zeta)\varphi(\zeta),$$

sono funzioni continue a supporto compatto. Da (3.3) deduciamo che $u \in C^{1+\alpha}_{d_{0,z_0}}$. In particolare K_{1,z_0} è Hölderiana e

$$|K_{2,z_0}(\zeta)| \leq C d_{0,z_0}(z_0, \zeta).$$

Queste stime sono sufficienti a concludere la prova. □

4 Principio di propagazione e regolarità

Proviamo il Teorema 1.5. Per ipotesi f, g sono funzioni globalmente Lipschitziane, $\partial_x f, \partial_x g$ esistono e sono continue, $\partial_x f \leq 0$ in S_T e $\partial_x g > 0$ in $\mathbb{R}^2$. Vogliamo provare che $\partial_x u > 0$. La dimostrazione è basata sul principio di minimo forte.

Bony nel suo lavoro [6] sulla propagazione dei massimi, mostra che, come il problema della regolarità, anche il principio di massimo per un operatore del tipo (1.8) è legato alle proprietà dei campi e dei loro commutatori. I risultati di Bony sono basati sulla seguente definizione di insieme invariante. Supponiamo che i campi vettoriali $X_0, ..., X_p$ siano localmente Lipschitziani su un dominio Ω di $\mathbb{R}^N$. Diciamo che un sottoinsieme E relativamente chiuso di Ω è positivamente X_j-invariante se per ogni curva

$$\gamma : [0, \delta[\longrightarrow \Omega$$

tale che $\gamma' = X_j(\gamma)$ e $\gamma(0) \in E$, si ha necessariamente $\gamma(s) \in E$ per ogni $s \in [0, \delta[$. Se E è positivamente invariante per X_j e $-X_j$, diciamo che E è X_j-invariante. In altre parole, E è X_j-invariante se per ogni

$$\gamma : I \longrightarrow \Omega$$

curva integrale di X_j tale che $\gamma(s_0) \in E$ per qualche $s_0 \in I$, allora $\gamma(I) \subseteq E$. Il principio di minimo forte di Bony si basa sull'applicazione di un lemma di tipo Hopf e afferma che se v é soluzione di

$$\sum_{j=1}^{p} X_j^2 v + X_0 v \leq 0, \qquad \text{in } \Omega, \tag{4.1}$$

allora l'insieme dei minimi di v

$$E = \{x \in \mathbb{R}^N \mid v(x) = \min_{\Omega} v\}$$

è invariante per $X_1, ..., X_p$ e positivamente X_0-invariante. Da questo principio deriva il principio di minimo classico per operatori ellittici e parabolici. Inoltre il principio di Bony afferma che E è invariante anche rispetto ai commutatori di ogni ordine dei campi $X_0, ..., X_p$, ammesso che la regolarità dei coefficienti sia tale da definire le relative curve

integrali. Di conseguenza il principio di minimo forte vale anche per un operatore in (4.1) che verifichi la condizione di Hörmander. Notiamo che a differenza del problema della regolarità, qui non è necessario che i campi siano C^∞ ma basta che siano localmente Lipschitziani.

Con le tecniche della Sezione 2 siamo in grado di provare che $v \equiv \partial_x u$ è soluzione classica di

$$\begin{aligned} \partial_{xx} v + u\partial_v - \partial_t v + (\partial_y u - \partial_v f)v &= \partial_x f, && \text{in } S_T, \\ v(\cdot, 0) &= \partial_x g, && \text{in } \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Poichè $\partial_v f$ è limitata per ipotesi e $\partial_y u$ è limitata per la (1.3), dal principio di minimo debole otteniamo che $\partial_x u \geq 0$. Dunque dobbiamo provare che l'insieme

$$E = \{z \in S_T \mid \partial_x u(z) = 0\}$$

è vuoto. Supponiamo per assurdo che esista $z_0 = (x_0, y_0, t_0) \in E$. Per (1.3), la curva integrale del campo $Y_u \equiv (u\partial_y - \partial_t)$ che parte da z_0

$$\gamma(s) = \left(x_0, y_0 + \int_0^s u(\gamma(\sigma))d\sigma, t_0 - s\right)$$

è definita per ogni $s \in [0, t_0]$. Poichè E è positivamente Y_u-invariante, si ha $\gamma([0, t_0]) \subseteq E$ e, in particolare,

$$\partial_x u(\gamma(t_0)) = \partial_x u\left(x_0, y_0 + \int_0^{t_0} u(\gamma(\sigma))d\sigma, 0\right) = 0$$

che contraddice l'ipotesi $\partial_x g > 0$. Questo conclude la prova del Teorema 1.5.

Riferimenti bibliografici

[1] ANTONELLI, F., *Backward-forward stochastic differential equations*, Ann. Appl. Probab. 3, No.3, 777-793 (1993).

[2] ANTONELLI, F.; BARUCCI, E.; MANCINO, M.E., *Backward-forward stochastic differential utility: existence, optimal consumption and equilibrium analysis*, preprint.

[3] ANTONELLI, F.; PASCUCCI, A., *On the viscosity solutions of a stochastic differential utility problem*, preprint.

[4] BENSOUSSAN, A., *Stochastic control of partially observable sustems*, Cambridge University Press (1992).

[5] BIAN, B.; DONG, G., *The regularity of viscosity solutions for a class of fully nonlinear equations*, Sci. China, Ser. A 34, No.12, 1448-1457 (1991).

[6] BONY, J.M., *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble , 19,1 277-304 (1969).

[7] BRAMANTI, M.; BRANDOLINI, L., *L^p estimates for uniformly hypoelliptic operators with discontinuous coefficients on homogeneous groups*, preprint.

[8] BRAMANTI, M.; CERUTTI, M.C.; MANFREDINI, M., *L^p estimates for some ultraparabolic operators with discontinuous coefficients*, J. Math. Anal. Appl. 200, No.2, 332-354, Art. No.0209 (1996).

[9] CABRE, X.; CAFFARELLI, L. A., *Fully nonlinear elliptic equations*, Colloquium Publications. American Mathematical Society. 43. Providence, RI (1995).

[10] CITTI, G., *C^∞ regularity of solutions of a quasilinear equation related to the Levi operator*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. 23, No.3, 483-529 (1996).

[11] CITTI, G., *Proprietà di regolarità dell'equazione di Levi che non dipendono da ipotesi di curvatura,* Sem. Anal. Mat. Dip. Mat. Univ. Bologna, A.A. 1999/2000, Tecnoprint, Bologna.

[12] CITTI, G.; LANCONELLI, E.; MONTANARI, A., *Smoothness of Lipschitz continuous graphs, with non vanishing Levi curvature*, apparirà su Acta Math.

[13] CITTI, G.; PASCUCCI, A.; POLIDORO, S., *On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equation arising in mathematical finance*, Diff. Int. Eq. 14-6 701-738(2001).

[14] CITTI, G.; PASCUCCI, A.; POLIDORO, S., *Regularity properties of viscosity solutions of a non-Hörmander degenerate equation*, apparirà su J. Math. Pures Appl.

[15] CRANDALL, M. G.; ISHII, H.; LIONS, P.-L.,*User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. 27, No.1, 1-67 (1992).

[16] ESCOBEDO, M.; VAZQUEZ, J.L.; ZUAZUA, E., *Entropy solutions for diffusion-convection equations with partial diffusivity*, Trans. Am. Math. Soc. 343, No.2, 829-842 (1994).

[17] FLEMING, W.H.; SONER, H.M., *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, Applications of Mathematics. 25. New York: Springer-Verlag. xv, 428 p. (1993).

[18] FOLLAND, G.B., *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*, Ark. Mat. 13, 161-207 (1975).

[19] Folland, G.B.; Stein, E.M., *Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group*, Commun. Pure Appl. Math. 27, 429-522 (1974).

[20] Franchi, B.; Lanconelli, E., *Une métrique associeé á une classe d'operateurs elliptiques dégenéres*, in Proceedings of the meeting "Linear partial and pseudo differential operators", Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino, Torino, IV. Ser. 10, 523-541 (1982).

[21] Franchi, B.; Lanconelli, E., *Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. 10, 523-541 (1983).

[22] Friedman, A., *Partial differential equations of parabolic type*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc. XIV, (1964).

[23] Hopf, E., *The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$*, Comm. Pure Appl. Math., x3, 201-230 (1950).

[24] Hörmander, L., *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. 119, 147-171 (1967).

[25] Hu, Y.; Peng, S., *Adapted solution of backward stochastic evolution equation*, Stochastic Anal. Appl. 9, No.4, 445-459 (1991).

[26] Ishii H.; Lions P.-L., *Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations*, J. Differ. Equations 83, No.1, 26-78 (1990).

[27] Krylov, N.V., *Hölder continuity and L_p estimates for elliptic equations under general Hörmander's condition*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 9, No.2, 249-258 (1997).

[28] Jerison, D.S.; Sanchez-Calle, A., *Estimates for the heat kernel for a sum of squares of vector fields,* Indiana Univ. Math. J. 35, 835-854 (1986).

[29] Lu, G., *Weighted Poincaré and Sobolev inequalities for vector fields satisfying Hörmander's condition and applications*, Rev. Mat. Iberoam. 8, No.3, 367-439 (1992).

[30] Ma, J.; Protter, P.; Yong, J., *Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly - a four step scheme*, Probab. Theory Relat. Fields 98, No.3, 339-359 (1994).

[31] Ma, J.; Yong, J., *Forward-Backward stochastic differential equations and their applications*, Lecture Notes in Mathematics. 1702. Berlin: Springer, (1999).

[32] Moser, J., *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 14, (1961).

[33] NAGEL, A.; STEIN, E.M.; WAINGER, S., *Balls and metrics defined by vector fields I: basic properties*, Acta Math. 155, 103-147 (1985).

[34] PASCUCCI, A.; POLIDORO S., *On the Cauchy problem for a nonlinear ultraparabolic equation*, preprint

[35] POLIDORO, S., *On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type*, Le Matematiche 49, No.1, 53-105 (1994).

[36] ROTHSCHILD, L.P.; STEIN, E.M., *Hypoelliptic differential operators on nilpotent groups*, Acta Math. 137(1976), 247-320 (1977).

[37] SANCHEZ-CALLE A., *Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields*, Invent. Math. 78, 143-160 (1984).

[38] TRUDINGER, N.S., *Hölder gradient estimates for fully nonlinear elliptic equations*, Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A 108, No.1/2, 57-65 (1988).

[39] VOL'PERT, A.I.; HUDJAEV, S.I., *Cauchy's problem for degenerate second order quasilinear parabolic equations*, Math. USSR, Sb. 7-3 365-387 (1970).

[40] YONG, J.; ZHOU, X.Y., *Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations*, Applications of Mathematics. 43. New York, NY: Springer. xx, (1999).

[41] WANG, L., *On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations I*, Commun. Pure Appl. Math. 45, No.1, 27-76 (1992).